第12講　数学Ⅲ ―その3―

47　2つの関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\frac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

《15京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

48 次の式で与えられる底面の半径が2，高さが1の円柱 C を考える．

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

《08 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

49　n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

50　極方程式 $r=1+\cos\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

《09 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　数学Ⅲ ― その 3 ―

47　2 つの関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\frac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

《15 京大・理系》

【答】 $\frac{\pi}{16}$

【解説】 $\sin 2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\right)=0$ と

$\frac{\pi}{16}\leqq\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}\leqq\frac{13}{16}\pi$，$-\frac{\pi}{16}\leqq\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\leqq\frac{3}{16}\pi$ より $\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}=0$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{8}$，$\frac{7}{24}\pi$

よって求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\pi\left[(\sin 2x)^2-\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2\right]dx &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\frac{\pi}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x\right\}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

48 次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える．

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

《08 京大・理系》

【答】 $3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

【解説】 実数 t を $-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3}$ を満たすものとし，$\mathrm{P}(t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{4-t^2},\ 0)$，$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{4-t^2},\ \sqrt{4-t^2}-1)$ とするとき，題意の立体を平面 $x=t$ で切った切り口は $\triangle\mathrm{PQR}$ となるので，その面積は $\dfrac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2=\dfrac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})$ である．

よって求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt &= \int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt\\ &= \left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt\end{aligned}$$

であるが，$\left[5t-\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$ については $t=2\sin\theta$ と置換積分することで

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}2|\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2+2\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるので，求める体積は $4\sqrt{3}-2\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

49　n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\log 2-1$

【解説】 最初のボールはどこに入ってもよく，$k\,(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 個目のボールは，$k-1$ 個目までのボールが入っていない箱に入ればよいので

$$p_n=\frac{2n}{2n}\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-2}{2n}\times\cdots\times\frac{2n-(n-2)}{2n}\times\frac{2n-(n-1)}{2n}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{2n-k}{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1\log\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx\\ &= \left[\left\{\left(1-\frac{1}{2}x\right)\log\left(1-\frac{1}{2}x\right)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right\}\times(-2)\right]_0^1\\ &= \mathbf{\log 2-1}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

50 極方程式 $r=1+\cos\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ． 《09 京大・理系》

【答】 4

【解説】 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ \ y=(1+\cos\theta)\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-(1+2\cos\theta)\sin\theta,$$

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)$ なので求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta &= \int_0^\pi\sqrt{(1+2\cos\theta)^2\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2(2\cos\theta-1)^2}\,d\theta\\ &= \int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta\\ &= \int_0^\pi 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta\\ &= \int_0^\pi 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\\ &= \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=\mathbf{4}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。